

Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 6

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1 (20 Μόρια)

Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις ακόλουθες προτάσεις ως Αληθή ή Ψευδή, με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Αν το σύνολο  $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  είναι βάση ενός διανυσματικού χώρου  $X_{\mathbb{R}}$ , τότε το σύνολο

$$\mathcal{C} = \{x_1 + x_3, -x_2, \sqrt{2}x_3, x_2 + 7x_4 - x_3\}$$

είναι επίσης βάση του  $X_{\mathbb{R}}$ .

- (ii) Η διάσταση του υπόχωρου  $V = \langle (1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 1) \rangle$  του  $\mathbb{R}^4$  είναι 4.  
(iii) Κάθε υποσύνολο ενός γραμμικά εξαρτημένου συνόλου, είναι γραμμικά εξαρτημένο.  
(iv) Η διάσταση του χώρου των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= 0 \\x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n &= 0\end{aligned}$$

είναι ίση με 2.

Θέμα 2 (30 Μόρια)

Θεωρούμε τα διανύσματα  $\vec{a} = (1, -2, \lambda)$ ,  $\vec{b} = (3, 0, -2)$ ,  $\vec{c} = (2, -1, -5)$ .

- (i) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες τα  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα.  
(ii) Για τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , για τις οποίες τα  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  είναι γραμμικά εξαρτημένα, να βρεθεί μια (μη τετριμμένη) σχέση γραμμικής εξάρτησης η οποία τα συνδέει.  
(iii) Να προσδιορίσετε μια βάση και τη διάσταση του υπόχωρου  $Y = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$ .  
(iv) Να προσδιορίσετε έναν υπόχωρο  $W$  του  $\mathbb{R}^3$  ώστε  $\mathbb{R}^3 = Y \oplus W$ .

Θέμα 3 (25 Μόρια)

Δίνονται τα υποσύνολα  $V$  και  $W$  του  $\mathbb{R}$ -διανυσματικού χώρου  $M_2(\mathbb{R})$ , ως εξής:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{και} \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (i) Να δείξετε ότι τα  $V$  και  $W$  είναι υπόχωροι του  $M_2(\mathbb{R})$ .  
(ii) Να βρείτε βάσεις για τους υπόχωρους  $V \cap W$  και  $V + W$ .  
(iii) Εξετάστε αν  $V + W = M_2(\mathbb{R})$  και επίσης, αν το  $V + W$  είναι ευθύ.

Θέμα 4 (25 Μόρια)

- (i) Δίνονται οι υπόχωροι  $V$  και  $W$  του  $\mathbb{R}$ -διανυσματικού χώρου  $\mathbb{R}_{11}[x]$  για τους οποίους  $\dim_{\mathbb{R}} V = 7$  και  $\dim_{\mathbb{R}} W = 10$ . Να βρείτε τις δυνατές τιμές για τις διαστάσεις των υπχώρων  $V \cap W$  και  $V + W$ . Εξετάστε τότε ισχύει:

- (a)  $\dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) = 5$   
(b)  $\dim_{\mathbb{R}}(V \cap W) = 7$

- (ii) Αφού δείξετε ότι το σύνολο  $\mathcal{B} = \{4, 4x - 1, 2x^2 - x - 1\}$  είναι μία βάση του  $\mathbb{R}_2[x]$  να βρείτε τον πίνακα μετάβασης από τη βάση  $\mathcal{B}$  στη συνήθη βάση  $\{1, x, x^2\}$  του  $\mathbb{R}_2[x]$ . Περιγράψτε ποιος είναι ο αντίστροφος του.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ